Contrôle de mathématiques

Mercredi 16 octobre 2019

Exercice 1

Question de cours **(2 points)**

1) Soit (u_n) une suite. Donner la définition de $\lim u_n = +\infty$.

2) À l'aide de l'inégalité de Bernoulli : $a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1+na$,
démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, diverge vers $+\infty$.
(On ne demande pas de démontrer l'inégalité de Bernoulli).

Exercice 2

Somme de termes et récurrence **(3 points)**

Soit la somme S_n définie par tout $n \geqslant 1$ par : $S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n(n+1)$

1) a) Calculer les termes S_1, S_2 et S_3
   b) Déterminer une relation entre S_{n+1} et S_n.

2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 3

Limites de suites définies explicitement **(4 points)**

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n+\sin n}{n+2}$

2) $u_n = \dfrac{4^n - 2^n}{3^n + 1}$

3) $u_n = \dfrac{n}{5} + 7 - \dfrac{3n}{n^2+4}$

4) $u_n = \dfrac{-6n^2+3n+7}{n^2+n+1}$

Exercice 4

Suite monotone **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4$

2) a) Montrer que : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n+1)(u_n-4)$
   b) En déduire que la suite (u_n) est croissante. On se justifiera soigneusement.

3) Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ. Peut-on dire que $\ell = 4$?

4) On admet que la limite ℓ vérifie $\sqrt{3\ell+4} = \ell$. Déterminer ℓ.

EXERCICE 5

Vrai-Faux et suite homographique **(8 points)**

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1) On considère la suite (p_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $p_n = n^2 - 42n + 4$
Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2) Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3) On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,
$$n^2 \leqslant (n+1)^2\, w_n \leqslant n^2 + n$$
Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n}$.

1) Calculer u_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2^n}{1 + 2^n}$.

3) On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme u_n en fin d'exécution.
Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1

Entrées et initialisation
- Lire n
- $\dfrac{1}{2} \to u$, $0 \to i$

Traitement
- **tant que** $i < n$ **faire**
  - $\dfrac{2u}{u+1} \to u$
  - $i + 1 \to i$
- **fin**

Sorties : Afficher u

Algorithme 2

Entrées et initialisation
- Lire n
- $\dfrac{1}{2} \to u$

Traitement
- **pour** i de 0 à n **faire**
  - $\dfrac{2u}{u+1} \to u$
- **fin**

Sorties : Afficher u

Algorithme 3

Entrées et initialisation
- Lire n

Traitement
- $2^n \to p$
- $\dfrac{p}{p+1} \to u$

Sorties : Afficher u